После опубликования заданий очередного варианта ЦТ многие учителя с интересом изучают их. Хотелось бы поделиться вариантом решения задачи В10 в заданиях 2012 года по физике. Скажу прямо, на выполнение этой задачи было затрачено значительно больше трёх часов.

В первом варианте задача была сформулирована следующим образом. Проволочное кольцо радиусом $r = 4{,}0$ см и массой $m = 98{,}6$ мг, изготовленное из проводника сопротивлением $R = 0{,}40$ Ом, находится в неоднородном магнитном поле, проекция индукции которого на ось Ох имеет вид $B_x = kx$, где $k = 4{,}0 \frac{Тл}{м}$, x – координата. В направлении оси Ох кольцу сообщили скорость, модуль которой $\upsilon_0 = 4{,}0 \frac{м}{с}$. Требуется указать расстояние в см, которое кольцо прошло до остановки, учитывая что плоскость кольца во время движения была перпендикулярна оси Ох.

Полезно обратить внимание на то, что осевая симметрия задачи значительно упрощает ее решение. Исходя из условия, картина силовых линий магнитного поля будет иметь вид, представленный на рисунке 1.

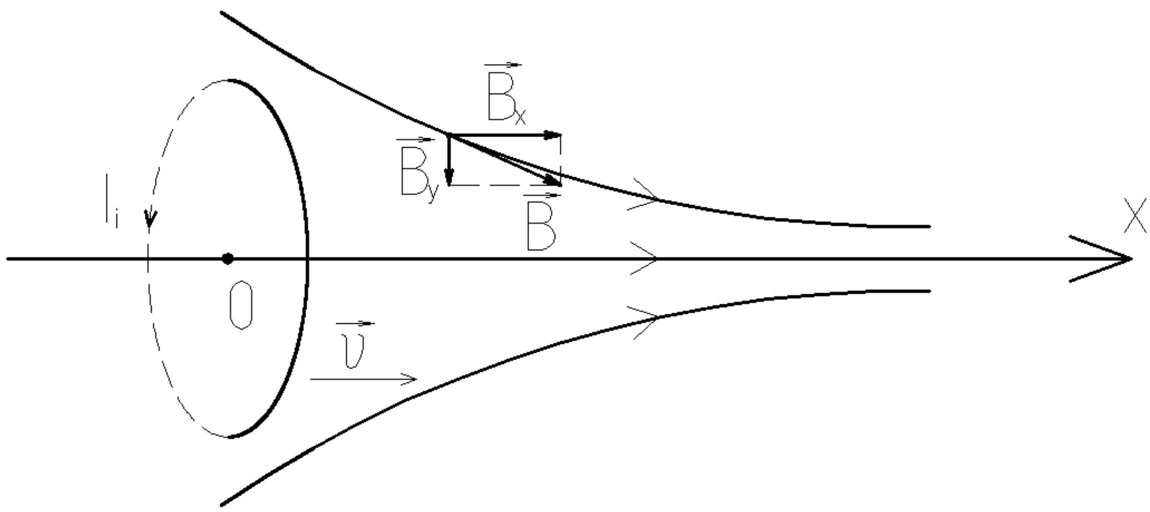

Рисунок 1

Физика процесса проста и понятна всем, кто знаком с явлением электромагнитной индукции и законом сохранения энергии. Очевидно, что причиной торможения кольца является действие на него силы Ампера, сопровождающееся превращением его кинетической энергии в тепловую. Попробуем описать данное явление количественно.

Пусть за малое время dt кольцо прошло путь dx. Согласно закону Фарадея наведенная в кольце ЭДС определяется по формуле:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi r^2 k dx}{dt} = -\pi r^2 k \upsilon \qquad (1)$$

Знак ″-″ указывает на то, что направление тока и вектор скорости кольца образуют левый винт. Разобьем кольцо на большое количество элементарных прямолинейных проводников длиной dl каждый. Тогда наведенная в каждом проводнике ЭДС равна по модулю:

$$de_i = \upsilon B_y dl, \qquad (2)$$

где $\overrightarrow{B_y}$ - перпендикулярная оси Ох составляющая вектора $\vec{B}$.

Интегрируя по всей длине кольца, находим:

$$|\varepsilon_i| = \upsilon B_y \cdot 2\pi r \qquad (3)$$

Сравнивая соотношения (1) и (3), получаем:

$$B_y = \frac{rk}{2}, \qquad (4)$$

то есть эта составляющая вектора магнитной индукции $\vec{B}$ не меняется вдоль всей оси Ох. Следовательно, на каждый элемент разбиения кольца во время движения действует элементарная сила Ампера:

$$dF_A = B_y I_i dl, \qquad (5)$$

где $I_i = \frac{|\varepsilon_i|}{R} = \frac{k\pi r^2 \upsilon}{R}$ (6) – мгновенное значение силы тока в кольце.

Учитывая сонаправленность элементарных сил, интегрируя, находим:

$$F_A = B_y I_i \cdot 2\pi r = \frac{k^2 \pi^2 r^4 \upsilon}{R} \qquad (7)$$

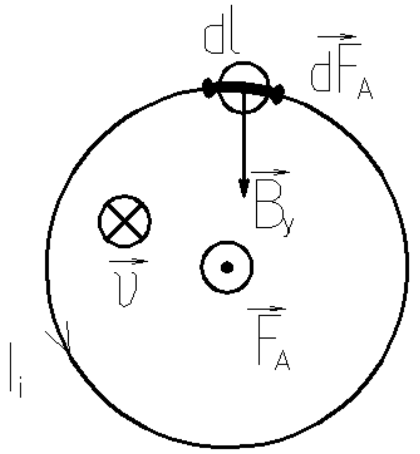

Рисунок 2

На рисунке 2 представлена ориентация указанных сил, если смотреть в направлении оси Ох.

Далее последовательное решение задачи выходит далеко за пределы школьной физической мысли, делая мечты абитуриента о стобалльном сертификате несбыточными.

Итак, применяя второй закон Ньютона, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$ma_x = F_{Ax} \text{ или } m\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{k^2\pi^2 r^4 \upsilon}{R} \quad (8)$$

Разделим переменные:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{k^2\pi^2 r^4}{mR}dt \quad (9)$$

Интегрируя, установим явный вид зависимости $\upsilon(t)$:

$$\int\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int\frac{k^2\pi^2 r^4}{mR}dt,$$

откуда $\ln\upsilon - \ln C = -\frac{k^2\pi^2 r^4}{mR}\cdot t$ или $\ln\frac{\upsilon}{C} = -\frac{k^2\pi^2 r^4}{mR}\cdot t,$ (10)

где C – постоянная интегрирования.

Экспоненциируя соотношение (10) с учетом начальных условий $(C = \upsilon_0)$ окончательно, находим:

$$\upsilon = \upsilon_0 \cdot \exp(-\frac{k^2\pi^2 r^4}{mR}\cdot t) \quad (11)$$

График, полученной функции имеет вид, представленный на рисунке 3.

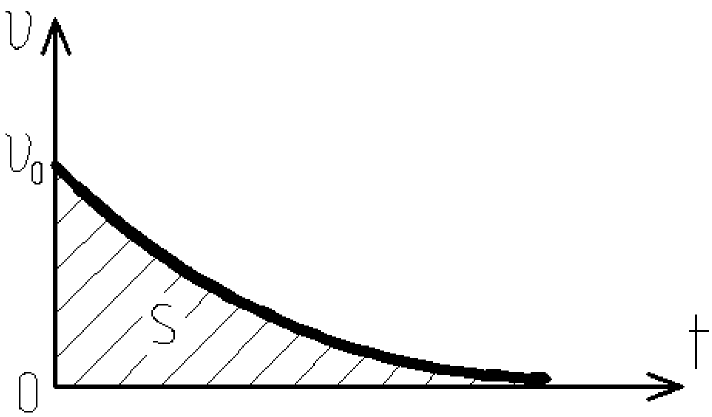

Рисунок 3

Возвращаемся в школьную физику: площадь фигуры, лежащей под заданным графиком численно равна пройденному до остановки пути. Вновь уходим в курс математики высшей школы: площадь можно найти интегрированием функции, задаваемой соотношением (11). Причем, как не странно, интегрировать придется в пределах времени от нуля до бесконечности. В этом можно убедиться в рамках энергетического подхода, применяя теорему об изменении кинетической энергии. Действительно, количество теплоты, выделившейся в кольце за время dt, найдем по закону Джоуля-Ленца:

$$dQ = I_i^2 R dt \text{ или } dQ = \frac{k^2 \upsilon^2 \pi^2 r^4}{R} dt \qquad (12)$$

Согласно упомянутой теореме:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \int_0^\tau \frac{k^2 \upsilon^2 \pi^2 r^4}{R} dt, \qquad (13)$$

где τ – время торможения кольца.

Таким образом, с учетом соотношения (11) имеем:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \int_0^\tau \frac{k^2 \pi^2 r^4}{R} \cdot \upsilon_0^2 \cdot \exp(-\frac{2k^2\pi^2 r^4}{mR} \cdot t) dt, \qquad (14)$$

откуда $\frac{m}{2} = \frac{k^2\pi^2 r^4}{R} \cdot \left(-\frac{mR}{2k^2\pi^2 r^4}\right) \cdot \left(\exp(-\frac{2k^2\pi^2 r^4}{mR} \cdot \tau) - 1\right).$

Из последнего соотношения следует: $\exp(-\frac{2k^2\pi^2 r^4}{mR} \cdot \tau) = 0,$ что означает: $\tau \to \infty$!

Входим в завершающую стадию решения задачи. Найдем пройденный кольцом путь:

$$S = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \upsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2 r^4 t}{mR}\right) dt = -\frac{\upsilon_0 mR}{k^2\pi^2 r^4} \cdot \lim_{\tau\to\infty}\left(\exp\left(-\frac{k^2\pi^2 r^4 \tau}{mR}\right) - e^0\right) = \frac{mR\upsilon_0}{k^2\pi^2 r^4} \qquad (16)$$

После всего пережитого проверка единиц измерения кажется легкой прогулкой:

$$[S] = \frac{1кг \cdot Ом \cdot м/с}{Тл^2/м^2 \cdot м^4} = \frac{1кг \cdot Ом}{Тл^2 \cdot м \cdot с} = \frac{1кг \cdot Ом \cdot м \cdot с}{Вб \cdot Тл \cdot с^2} = \frac{1кг \cdot м^2}{Тл \cdot А \cdot с^2 \cdot м} = \frac{1Дж}{Н} = 1м.$$

Подстановка данных условия в соотношение (16) приводит к следующему числовому ответу: $S = 39$ см.

Правда, можно «выйти» на конечную формулу после соотношения (7), если каким-то образом понять, что график зависимости силы торможения от пройденного пути имеет такой вид, что лежащая под ним фигура равновелика изображённой на рисунке 4!

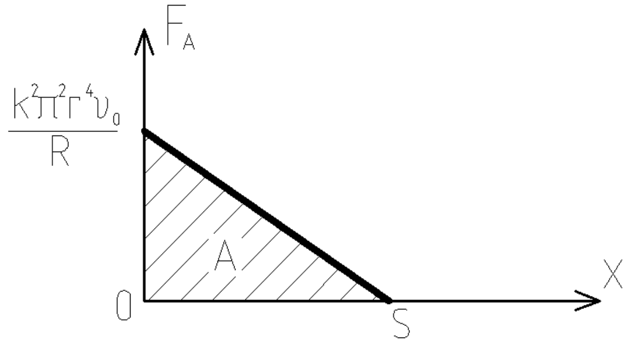

Рисунок 4

Площадь заштрихованного на рисунке 4 треугольника численно равна совершенной силой Ампера работе по торможению:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2\pi^2 r^4 \upsilon_0}{R} \cdot S, \tag{17}$$

откуда $S = \dfrac{mR\upsilon_0}{k^2\pi^2 r^4}$.

Я работаю в школе с 1995 года, считаюсь неплохим специалистом, добился некоторых результатов. До недавнего времени считал, что сдам ЦТ по физике на 100 баллов. Но теперь уверен, что за отведенные на испытания 3 часа сделать этого не смогу. Каково же было мое удивление, когда я узнал, что в нашей стране в этом году 2 абитуриента сдали ЦТ по физике на заветную сотню! Их было бы значительно больше, если бы некоторые задачи не выходили так далеко за рамки школьного курса. Это было бы справедливо в отношении тех ребят, кто добросовестно готовился к тестированию. Думается, каждый должен иметь реальный шанс заработать наивысший балл, не выходя на уровень кандидатской диссертации!

Алексей Николаевич Павлов, учитель физики высшей квалификационной категории государственного учреждения образования «Гимназия № 56 г. Гомеля».